

Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 năng khiếu năm học 2003-2004

Môn: Toán. Ngày thi: 7/6/2003.

Thời gian làm bài: 150 phút.

Câu 1. 1) Chứng minh rằng phương trình $(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^3 - b^3)x + a^4 - b^4 = 0$ luôn có nghiệm với mọi a, b .

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ (x+1)^3 + (y+1)^3 = 35 \end{cases}$$

Câu 2. 1) Với mỗi số nguyên dương n , đặt $a_n = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$, $b_n = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$. Chứng minh rằng với mọi n , $a_n \cdot b_n$ chia hết cho 5 và $a_n + b_n$ không chia hết cho 5.

2) Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương đôi một khác nhau sao cho tích của chúng bằng tổng của chúng.

Câu 3: Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AA₁. Hạ A₁H vuông góc AB, A₁K vuông góc AC. Đặt A₁B = x, A₁C = y.

1) Gọi r và r' là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC và tam giác AHK tương ứng. Hãy tính tỷ số r'/r theo x, y, suy ra giá trị lớn nhất của tỷ số đó.

2) Chứng minh rằng tứ giác BHKC nội tiếp trong một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó theo x, y.

Câu 4: 1) Cho đường tròn (C) tâm O và một điểm A khác O nằm trong đường tròn. Một đường thẳng thay đổi, qua A nhưng không đi qua O cắt (C) tại M, N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN luôn đi qua một điểm cố định khác O.

2) Cho đường tròn (C) tâm O và một đường thẳng (D) nằm ngoài đường tròn. I là một điểm di động trên (D). Đường tròn đường kính IO cắt (C) tại M, N. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5: 1) Cho một bảng vuông 4x4. Trên các ô của hình vuông này, ban đầu người ta ghi 9 số 1 và 7 số 0 một cách tùy ý (mỗi ô một số). Với mỗi phép biến đổi bảng, cho phép chọn một hàng hoặc một cột bất kỳ và trên hàng hoặc cột được chọn đổi đồng thời các số 0 thành số 1, các số 1 thành số 0. Chứng minh rằng sau một số hữu hạn các phép biến đổi như vậy, ta không thể đưa bảng ban đầu về bảng gồm toàn các số 0.

2) Ở vương quốc “Sắc màu kỳ ảo” có 45 hiệp sĩ: 13 hiệp sĩ tóc đỏ, 15 hiệp sĩ tóc vàng và 17 hiệp sĩ tóc xanh. Khi hai hiệp sĩ có màu tóc khác nhau gặp nhau thì tóc của họ lập tức đổi sang màu tóc thứ ba (ví dụ, khi hiệp sĩ tóc đỏ gặp hiệp sĩ tóc vàng thì cả hai đổi sang tóc xanh). Hỏi có thể xảy ra trường hợp sau một số hữu hạn lần gặp nhau như vậy ở “Sắc màu kỳ ảo” tất cả các hiệp sĩ đều có cùng màu tóc được không?

HẾT

Cán bộ coi thi không giải thích đề thi.