

Câu I.

Cho hàm số

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + m.$$

- 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với $m = 0$.
- 2) Xác định m để đồ thị của hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt với các hoành độ lập thành một cấp số cộng.

Câu II.

- 1) Tìm các nghiệm $x \in (0 ; 2\pi)$ của phương trình

$$\frac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \sin 2x + \cos 2x.$$

- 2) Chứng minh rằng các trung tuyến AA' và BB' của tam giác ABC vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$\cotg C = 2(\cotg A + \cotg B).$$

Câu III.

Giả sử $(x ; y)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 2a - 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3 \end{cases}$$

Xác định a để tích xy là nhỏ nhất.

Câu IVa. Trong mặt phẳng xem hypebol (H)

$$(H) : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Gọi (D) là đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và có hệ số góc k, (D') là đường thẳng đi qua O và vuông góc với (D).

- 1) Tìm điều kiện đối với k để (D) và (D') đều cắt (H).
- 2) Tính theo k diện tích của hình thoi với 4 đỉnh là 4 giao điểm của (D) và (D') với (H).
- 3) Xác định k để hình thoi ấy có diện tích nhỏ nhất.

Câu IVb. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác OAB với $OA = OB$, $AB = 2a$, đường cao $OH = h$. Trên đường thẳng (d) vuông góc với (P) tại O, lấy điểm M với $OM = x$. Gọi E, F là hình chiếu vuông góc của A lên MB và OB ; N là giao điểm của đường thẳng EF với (d).

- 1) Chứng minh rằng $MB \perp NA$, $MA \perp NB$.
- 2) Tính BF, BE và thể tích khối tứ diện ABEF theo a, h và x.
- 3) Tìm vị trí của M trên (d) để tứ diện MNAB có thể tích nhỏ nhất.