

Câu I.

Cho hàm số

$$f(x) = x^n + (c - x)^n$$

trong đó $c > 0$, và n là một số nguyên dương lớn hơn 1.

1) Khảo sát sự biến thiên của hàm số đó.

2) Từ kết quả ấy, chứng minh bất đẳng thức

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \geq \frac{a^n + b^n}{2}$$

với a, b là hai số tùy ý thỏa mãn điều kiện $a + b \geq 0$, còn n là số nguyên dương bất kì.

Câu II.

1) Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3}$$

2) Chứng minh rằng từ bốn số cho trước luôn luôn có thể chọn ra được hai số x, y sao cho

$$0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq 1.$$

Câu III.

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4} \\ 3\operatorname{tg} x = \operatorname{tgy}. \end{cases}$$

Câu IV.

Chứng minh rằng nếu các góc của tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $2A + 3B = \pi$, thì các cạnh tương ứng của nó thỏa mãn :

$$a + b \leq \frac{5}{4}c.$$

Câu Va.

Trong không gian với hệ tọa độ trục chuẩn, cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D', với A'(0, 0, 0), B'(a, 0, 0), D'(0, b, 0), A(0, 0, c), trong đó a, b, c > 0. Gọi P, Q, R, S lần lượt là trung điểm các cạnh AB, B'C', C'D', DD'.

- 1) Viết phương trình tham số của hai đường thẳng PR, QS.
- 2) Xác định a, b, c để hai đường thẳng PR, QS vuông góc với nhau.
- 3) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng PR, QS cắt nhau.
- 4) Tính diện tích tứ giác PQRS.

Câu Vb.

Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, và cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Mặt phẳng qua A, vuông góc với SC, cắt SB, SC, SD theo thứ tự tại B', C', D'.

- 1) Chứng minh rằng tứ giác AB'C'D' có hai góc đối diện vuông.
- 2) Cho S di chuyển trên đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại A. Chứng tỏ rằng mặt phẳng (AB'C'D') luôn đi qua một đường thẳng cố định và 7 điểm A, B, B', C, C', D, D' cùng nằm trên một mặt cầu cố định.
- 3) Gọi x là góc nhọn tạo bởi cạnh SC và mặt bên (SAB). Biết rằng ABCD là hình vuông, hãy tính tỉ số giữa thể tích của hai hình chóp S.AB'C'D' và S.ABCD.