

**Câu I.** 1) Gọi  $a$  là hoành độ của  $M$ , vậy  $M$  có tung độ  $a^2 - 1$ . Do đó

$$OM^2 = a^2 + (a^2 - 1)^2 = a^4 - a^2 + 1 = \left(a^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}, \text{ suy ra } OM \text{ ngắn nhất khi } a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2) Với  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$  đường thẳng  $OM$  có hệ số góc  $k = \frac{y_M}{x_M} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Tại  $M$ , tiếp tuyến của  $(P)$  có hệ số góc  $y'_M = 2x_M = \sqrt{2}$ ; vậy tiếp tuyến ấy vuông góc với  $OM$ .

**Câu II.** 1) Hàm  $y$  được xác định với mọi  $x$ , và có đạo hàm

$$y' = \cos x + 6\cos 2x = 12\cos^2 x + \cos x - 6.$$

Ta có  $y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{2}{3}, \cos x = -\frac{3}{4}$ .

Vì  $y$  có đạo hàm với mọi  $x$ , nên  $y$  đạt giá trị lớn nhất tại một điểm tại đó  $y' = 0$ .

a) Với  $\cos x = \frac{2}{3}, \sin x = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow y = \sin x + 6\sin x \cos x =$   
 $= \sin x (1 + 6\cos x) = \pm \frac{5\sqrt{5}}{3}.$

b) Với  $\cos x = -\frac{3}{4}, \sin x = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}; y = \sin x(1 + 6\cos x) = \pm \frac{7\sqrt{7}}{8}.$

Suy ra  $y$  đạt giá trị lớn nhất  $y_{\max} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$  khi  $\cos x = \frac{2}{3}, \sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}.$

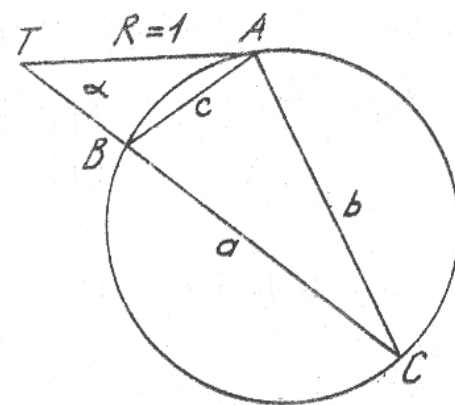
2) Vì  $TA = R = 1$ , nên để đường thẳng  $d$  cắt đường tròn tại  $B$  và  $C$ , ta phải có  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

Với kí hiệu trên hình vẽ, ta tính được các góc của tam giác  $ABC$ :  $B = \alpha + C, A = \pi - (B + C) = \pi - (\alpha + 2C)$

rồi áp dụng định lí hàm sin cho tam giác ấy ( $R = 1$ ) thì được  $a = 2\sin(\alpha + 2C), c = 2\sin C$ .

Gọi  $S$  là diện tích tam giác  $ABC$ , ta có  $S = \frac{1}{2} BC \cdot TA \cdot \sin \alpha = \sin(\alpha + 2C) \sin \alpha.$

Mặt khác áp dụng định lí hàm sin cho tam giác  $ATB$ :



$$\frac{C}{\sin\alpha} = \frac{AT}{\sin^2 ABT} \Leftrightarrow \frac{2\sin C}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin(\alpha + C)} \Rightarrow \sin\alpha = 2\sin C \sin(\alpha + C) = \cos\alpha - \cos(\alpha + 2C) \Rightarrow$$

$$\cos(\alpha + 2C) = \cos\alpha - \sin\alpha.$$

$$\text{Vì vậy } S^2 = \sin^{2\alpha} \sin^2(\alpha + 2C) = \sin^{2\alpha} [1 - (\cos\alpha - \sin\alpha)^2] = 2\sin^{3\alpha} \cos\alpha$$

$$\text{hay } S^4 = 4\sin^{6\alpha} \cos^2\alpha = 4\sin^{6\alpha} (1 - \sin^2\alpha) = \frac{4}{3} \sin^{2\alpha} \cdot \sin^{2\alpha} \cdot \sin^{2\alpha} \cdot (3 - 3\sin^2\alpha) \leq$$

$$\leq \frac{4}{3} \left( \frac{\sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \sin^2\alpha + 3 - 3\sin^2\alpha}{4} \right)^4 = \frac{27}{64}.$$

$$\text{Dấu = xảy ra khi } \sin^{2\alpha} = 3 - 3\sin^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

**Câu III.** 1) Viết phương trình đã cho dưới dạng  $a(|x + 2| + |x - 1|) = b$ .

Xét hàm

$$y = |x + 2| + |x - 1| = \begin{cases} 2x - \frac{1}{3} & \text{kh } x \leq -2 \\ 3 & \text{kh } -2 \leq x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{kh } x \geq 1. \end{cases}$$

Vẽ đồ thị của hàm  $y$  và xét giao điểm của đồ thị với đường thẳng  $y = \frac{b}{a}$  ( $a \neq 0$ ), suy ra kết quả như sau :

a)  $a = 0, b \neq 0$  : phương trình vô nghiệm. Với  $a = 0, b = 0$  phương trình có nghiệm  $x$  tùy ý.

b) Với  $a \neq 0$

i) nếu  $b/a > 3$  : phương trình có hai nghiệm  $x = -\frac{1}{2} \left( \frac{b}{a} + 1 \right), x = \frac{1}{2} \left( \frac{b}{a} - 1 \right)$ ;

ii) nếu  $b/a = 3$  : phương trình có nghiệm :  $-2 \leq x \leq 1$ ;

iii) nếu  $b/a < 3$  : phương trình vô nghiệm.

2) Để ý nếu chẳng hạn  $x = y \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow y = z$ , và ta được các nghiệm

$$x = y = z = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, x = y = z = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ta hãy chứng tỏ hệ không còn có nghiệm nào khác.

Quả vậy giả sử  $(x, y, z)$  là một nghiệm trong đó  $x, y, z$  khác nhau từng đôi một. Hệ bất biến đối với phép hoán vị vòng quanh, nên có thể coi rằng  $x$  là số lớn nhất. Vì thế chỉ cần xét hai khả năng :  $x > y > z$  và  $x > z > y$ .

a)  $x > y > z$ . So sánh các vế trái của hệ, ta được  $z^2 > x^2 > y^2$ . Vậy phải có  $x > 0$  (nếu  $x \leq 0$  thì  $0 \geq x > y > z \Rightarrow x^2 < y^2 < z^2$ ) và  $z < 0$  (nếu  $z \geq 0$  thì  $x > y > z \geq 0 \Rightarrow x^2 > y^2 > z^2$ ). Từ  $x > 0 \Rightarrow z^2 = x + 1 > 1 \Rightarrow z < -1$ .

Nhưng khi đó  $y^2 = z + 1 < 0$  : mâu thuẫn.

b)  $x > z > y$ . Như trên, ta được  $z^2 > y^2 > x^2$ , vậy phải có  $x > 0, y < 0$ .  $\forall x > 0 \Rightarrow z^2 > 1$ . Do  $z + 1 = y^2 > 0 \Rightarrow z > -1$ , vậy  $z > 1 \Rightarrow y^2 = z + 1 > 2$ , mà  $y < 0$  nên  $y < -\sqrt{2}$ .

Khi đó  $x^2 = y + 1 < 0$  : mâu thuẫn.

**Câu IVa.**

$$I(x) = \int_1^x \frac{dt}{t(t+1)} = \int_1^x \left[ \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right] dt = [\ln|t| - \ln|t+1|]_1^x = \left[ \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| \right]_1^x = \ln \frac{x}{x+1} - \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{2x}{x+1} \quad (x < 1).$$

Vậy :  $\lim_{x \rightarrow \infty} I(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \ln \frac{2x}{x+1} \right) = \ln \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} \right) = \ln 2.$

**Câu Va.**

1) Gọi  $(x_0, y_0)$  là tọa độ giao điểm của  $(D_1)$  và  $(D_2)$ .

Khi đó  $\begin{cases} x_0 = -2t = 3t' + 1 \\ y_0 = -3t = 6t' + 3. \end{cases}$

Từ đó ta có hệ  $\begin{cases} -2t - 3t' = 1 \\ -3t - 6t' = 3, \end{cases}$

suy ra  $t = 1$  ( $t' = -1$ ).

Vậy  $(D_1)$  và  $(D_2)$  cắt nhau tại  $A (-2, -3)$ .

*Ghi chú :* Có thể giải bằng cách đưa về phương trình tổng quát

$$y = \frac{3}{2}x \text{ cho } (D_1),$$

$$y = 2x + 1 \text{ cho } (D_2)$$

2)  $(D_1)$  có vectơ chỉ phương  $\vec{v}_1 = (-2; -3)$ ,  $(D_2)$  có vectơ chỉ phương  $\vec{v}_2 = (3; 6)$ .

Gọi  $\alpha$  là góc nhọn hợp bởi  $(D_1)$  và  $(D_2)$ .  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$

$$\Rightarrow -6 - 18 = \sqrt{13} \cdot \sqrt{45} \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \Rightarrow \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = -\frac{24}{\sqrt{13 \cdot 45}} = -\frac{24}{\sqrt{13 \cdot 5 \cdot 9}} = -\frac{8}{\sqrt{65}}.$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = |\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2)| = \frac{8}{\sqrt{65}}$$

Chú ý :  $\cos \alpha \geq 0$  vì  $\alpha$  là góc nhọn.

**Câu IVb.**

1) Ta hãy chứng tỏ rằng  $B', C'$

nhìn  $AD'$  dưới góc vuông, từ đó suy ra  $AB'C'D'$  là một tứ giác nội tiếp.

Quả vậy  $CD \perp SA, CD \perp CA \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp AC'$ .

Vì  $AC'$  trong mặt phẳng  $(P)$ , nên  $AC' \perp SD$ . Suy ra  $AC' \perp (SCD) \Rightarrow AC' \perp C'D'$ .

Tương tự  $AB' \perp B'C'$ .

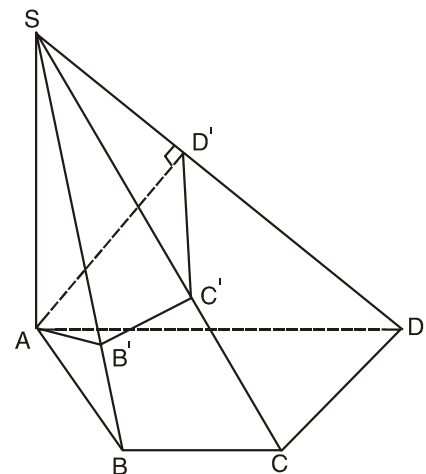
2) Từ  $AC' \perp (SCD) \Rightarrow AC' \perp SC$ , và tương tự  $AB' \perp SB$ .

Suy ra

$$SA^2 = SB \cdot SB' = SC \cdot SC' = SD \cdot SD'.$$

Ta có :  $V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'C'} + V_{S.AC'D'}$ ,

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB' \cdot SC'}{SB \cdot SC} = \frac{SB \cdot SB' \cdot SC \cdot SC'}{SB^2 \cdot SC^2} = \frac{SA^4}{SB^2 \cdot SC^2},$$



$$\frac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{SC \cdot SC'}{SC^2} \cdot \frac{SD \cdot SD'}{SD^2} = \frac{SA^4}{SC^2 \cdot SD^2}.$$

Để ý rằng

$$SB^2 = SA^2 + AB^2 = h^2 + a^2,$$

$$SC^2 = SA^2 + AC^2 = h^2 + 3a^2,$$

$$SD^2 = SA^2 + AD^2 = h^2 + 4a^2,$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} V_{S.ABCD}, \quad V_{S.ACD} = \frac{2}{3} V_{S.ABCD}, \quad V_{S.ABCD} = \frac{a^2 h \sqrt{3}}{4}$$

$$\text{suy ra } V_{S.AB'C'D'} = \frac{\sqrt{3} a^2 h^5 (h^2 + 2a^2)}{4(h^2 + a^2)(h^2 + 3a^2)(h^2 + 4a^2)}.$$

$$3) \quad SD' = \frac{SA^2}{SD} = \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + 4a^2}},$$

$$\text{vậy } dt(AB'C'D') = \frac{3V_{S.AB'C'D'}}{SD'} = \frac{3\sqrt{3} a^2 h^3 (h^2 + 2a^2)}{4(h^2 + a^2)(h^2 + 3a^2)\sqrt{h^2 + 4a^2}}.$$