**Câu I.**

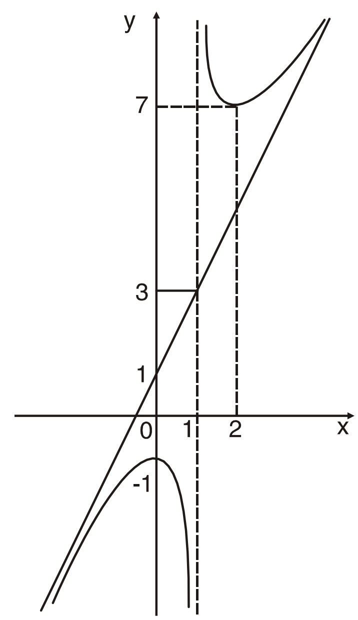
1) $y = 2x + 1 + \dfrac{2}{x-1}$. Miền xác định : x ≠ 1. Tiệm cận đứng : x = 1 ; tiệm cận xiên y = 2x + 1. Đạo hàm

$$y' = 2 - \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Bảng biến thiên

| x | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | −1 | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 7 | ↗ | $+\infty$ |

Đồ thị (Hình vẽ).




2) Đường thẳng y = 7 tiếp xúc với đồ thị tại điểm (2, 7), vậy nó là một tiếp tuyến của đồ thị. Do đó trong các tiếp tuyến kẻ đến đồ thị (C) từ các điểm trên đường thẳng
y = 7, thì đường thẳng này là một tiếp tuyến cố định.

3) Giả sử A(a, 7) là một điểm trên đường thẳng y = 7, từ đó có thể kẻ đến đồ thị hai tiếp tuyến lập với nhau góc $45^o$. Vì y = 7 đã là một tiếp tuyến, và là đường thẳng nằm ngang, nên tiếp tuyến kia phải có hệ số góc ± 1. Gọi $M(x_o, y_o)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến thứ hai này với đồ thị. Ta có

$$\pm 1 = y'(x_o) = 2 - \frac{2}{(x_o-1)^2} \Rightarrow x_o = 1 \pm \sqrt{2},\ x_o = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Như vậy trên đồ thị có 4 điểm tại đó tiếp tuyến có hệ số góc ± 1.
Bốn tiếp tuyến này cắt đường thẳng y = 7 tại 4 điểm phải tìm.

**Câu II.**

1) Với k = 1 ta có hệ

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 1 \\ y^2 - 3xy = 4 \end{cases} \Rightarrow 4(x^2 - 4xy + y^2) = y^2 - 3xy$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 13xy + 3y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3y,\ x = \frac{y}{4}.$$

Với x = 3y phương trình thứ 2 trở thành $-8y^2 = 4$ : vô nghiệm

Với $x = \dfrac{y}{4}$ phương trình thứ hai trở thành $y^2 = 16$, vậy hệ có nghiệm

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 4, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}$$

2) Trong trường hợp tổng quát, từ phương trình thứ hai suy ra y ≠ 0, vậy $x = \dfrac{y^2 - 4}{3y}$. Thế vào phương trình đầu và rút gọn ta được

$$11y^4+(9k-49)y^2-16=0.$$

Với mọi k, phương trình luôn có nghiệm $y^2>0$. Tính được y, suy ra x. Vậy hệ luôn có nghiệm.

**Câu III.**

1) Biến đổi $\sqrt{2}(2\sin x-1)=4(\sin x-1)-\sqrt{2}\cos 2x == 4(\sin x-1)-\sqrt{2}(1-2\sin^2 x)$
thì đi đến

$$\sin^2 x+(\sqrt{2}-1)\sin x-\sqrt{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x=-\sqrt{2} \text{ loại, } \sin x=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \ (k\in \mathbf{Z}).$$

2) Ta cần tìm số k lớn nhất để ta có

$$a^2+b^2>kc^2 \qquad (1)$$

với mọi tam giác ABC. Để ý rằng

$$c<a+b \Rightarrow c^2<(a+b)^2\le(a^2+b^2) \Rightarrow \frac{c^2}{2}<a^2+b^2, \text{ suy ra } k\ge\frac{1}{2}.$$

Mặt khác xét tam giác cân có a = b, thế thì (1) trở thành

$$2a^2>k(2a^2-2a^2\cos C) \Rightarrow k<\frac{1}{2\sin^2\frac{C}{2}}$$

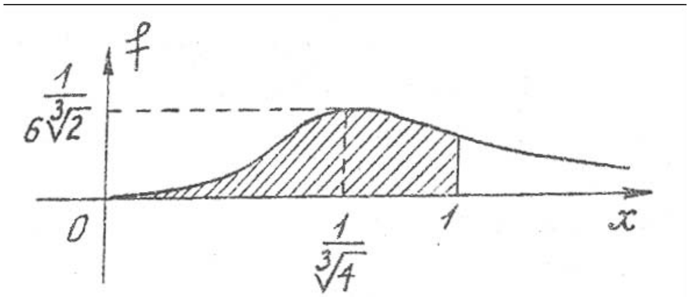
bất đẳng thức này phải đúng cho mọi góc C trong tam giác cân ABC. Cho $C\to\pi$, suy ra $k\le\frac{1}{2}$. Vậy $k=\frac{1}{2}$.

**Câu IVa.** 1) $f'(x) = \frac{2x - 8x^4}{(8x^3 + 1)^2}$,

vậy hàm số có bảng biến thiên trên $[0 ; +\infty)$

| x | 0 | | $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f' | 0 | + | 0 | - | |
| f | 0 | ↗ | $\frac{1}{6\sqrt[3]{2}}$ | ↘ | 0 |

Tiệm cận là $y = 0$




2) Diện tích phải tìm là

$$\int_0^1 \frac{x^2dx}{8x^3 + 1} = \frac{1}{24}\int_0^1 \frac{d(8x^3 + 1)}{8x^3 + 1} = \frac{1}{24}\ln(8x^3 + 1)\Big|_0^1 = \frac{\ln 9}{24}.$$

Câu IVb. 1) SAB, SAC là những tam giác vuông tại A ; AB', AC' là các đường cao hạ xuống cạnh huyền của các tam giác ấy, vậy $SB'.SB = SA^2 = = SC'.SC$ (1), từ đó suy ra BCC'B' là tứ giác nội tiếp. Từ (1) ta có $\frac{SB'}{SB} . SB^2 = \frac{SC'}{SC} . SC^2$, nên nếu B'C'//BC, thì $\frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC}$, suy ra $SB = SC \Rightarrow AB = AC$, trái với giả thiết ABC không phải là tam giác cân.

2) Xét đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và đường kính AD : $AB' \perp SB \Rightarrow AB' \perp (SBD) \Rightarrow$
$AB' \perp SD$. Tương tự $AC' \perp SD$. Vậy (AB'C') là mặt phẳng vuông góc với SD $\Rightarrow AI \perp SD$.

Vì AI ⊥ SA nên AI ⊥ (SAD) ⇒ AI ⊥ AD. Vậy AI là tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, suy ra $\widehat{IAB}$ $\widehat{ICA}$ (để ý rằng kết quả không phụ thuộc vào việc B nằm giữa I, C hay C nằm giữa I, B).