Câu I. Xét hàm $y = x^4 + px^3 + q$,

$y' = 4x^3 + 3px^2 = x^2(4x + 3p)$

x	$-\infty$		$\frac{-3p}{4}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	M	$\nearrow$	$+\infty$

Qua bảng xét dấu, ta thấy $M = y\left(\frac{-3p}{4}\right) = \frac{256q - 27p^4}{256}$ là giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Từ đó $y(x) \geq 0,\ \forall x \Leftrightarrow M \geq 0 \Leftrightarrow 256q \geq 27p^4$.

Câu II.

1) $0 < A, B, C < \frac{\pi}{2}$, $A + B + C = \pi \Rightarrow tg(A + B) = tg(\pi - C) = -tgC$

$\Leftrightarrow \frac{tgA + tgB}{1 - tgAtgB} = -tgC$

$\Rightarrow P = tgA\, tgB\, tgC = tgA + tgB + tgC$.

áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương tgA, tgB, tgC, ta có $P \geq 3\sqrt[3]{P} \Leftrightarrow P \geq 3\sqrt{3}$.

Vậy min $P = 3\sqrt{3}$ khi tgA = tgB = tgC $(A = B = C = \frac{\pi}{3})$.

2) Phương trình (1) có thể viết lại : cosx = 1 + cos2x hay cosx (2cosx − 1) = 0
(chú ý : 2cosx cos2x = cos3x + cosx).

Từ đó có a) cosx = 0, b) $\cos x = \frac{1}{2}$.

Bây giờ xét (2). Dùng công thức góc nhân đôi và nhân ba và đặt
cosx = t $(-1 \leq t \leq 1)$ thì ta được

$$t[4t^2 + 2(2 - a)t + (a - 3)] = 0 \qquad (3)$$

Để (1) tương đương với (2) thì (3) phải có hai nghiệm $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1}{2}$, ngoài ra nếu (3) có nghiệm t_3 nữa thì hoặc $t_3 = 0$ hoặc $t_3 = \frac{1}{2}$ hoặc t_3 không thuộc khoảng [-1, 1] . Dễ thấy rằng với $\forall$ a, (3) luôn có nghiệm $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1}{2}$ và $t_3 = \frac{a - 3}{2}$. Nếu cho $t_3 = 0$ thì được a = 3, nếu cho $t_3 = \frac{1}{2}$ thì được a = 4. Nếu buộc $t_3 < -1$ thì được a < 1, nếu buộc $t_3 > 1$ thì được a > 5. Vậy muốn (1) và (2) tương đương thì a < 1 hoặc a = 3 ; 4 hoặc a > 5.

Câu III.

1) Ta có (điều kiện là x > 0) :

$$6^{\log_6^2 x} = \left(6^{\log_6 x}\right)^{\log_6 x} = x^{\log_6 x}.$$

Vì vậy nếu đặt $t = x^{\log_6 x}$ thì có $2t \leq 12 \Rightarrow 0 < t \leq 6$,hay

$x^{\log_6 x} \leq 6 \Leftrightarrow (\log_6 x)^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \log_6 x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq x \leq 6$.

2) Điều kiện: $x \geq 1$. Đặt $t = \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1}$ ta có phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 3 \end{array}\right..$$

Chỉ có $t = 3$ thỏa mãn, từ đó

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{3x^2 - 5x + 2} = 6 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 19x + 34 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 2$

Câu IVa. 1) Điểm (x , y) không thuộc bất cứ đường thẳng nào của họ, nếu không tồn tại a sao cho

$$(x - 1)\cos \alpha + (y - 1) \sin \alpha = 4, (1)$$

nói cách khác nếu phương trình l ợng giác (1) (đối với a) không có nghiệm : điều kiện cần và đủ là

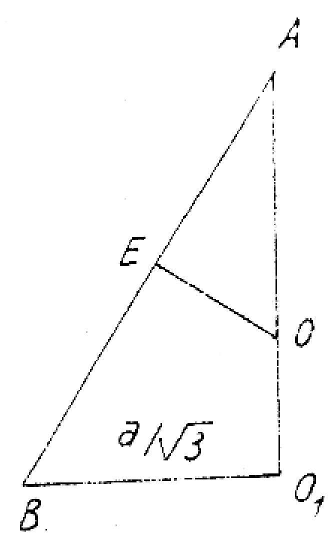
$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 < 4^2 = 16.$

Vậy tập hợp phải tìm là phần trong của hình tròn (C) có tâm (1 , 1) và bán kính R = 4.

2) Ta hãy chứng tỏ rằng họ đường thẳng đã cho luôn luôn tiếp xúc với đường tròn (C) : muốn vậy, ta chứng minh rằng khoảng cách d từ điểm (1 , 1) đến đường thẳng bằng 4. Thật vậy

$$d = \frac{|(1 - 1)\cos\alpha + (1 - 1)\sin\alpha - 4|}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} = 4.$$

Câu IVb. 1) Hình cầu tiếp xúc với các cạnh của tứ diện đều, do đó tâm hình cầu phải nằm trên giao tuyến của ba mặt phân giác của các góc nhị diện có điểm chung ở đỉnh của tứ diện. Giao tuyến này chính là một đường cao của tứ diện (hạ từ đỉnh của góc tam diện đó). Chẳng hạn tâm O của hình cầu nằm trên đường cao AO_1. Xét tam giác vuông AO_1B có AO_1 là đường cao, AB là cạnh của tứ diện, O là tâm của hình cầu. OE là bán kính hình cầu. Dễ thấy E là trung điểm của AB (hình cầu tiếp xúc với các cạnh của tứ diện tại trung điểm của chúng). Tam giác AEO và AO_1B đồng dạng, do đó có:



$$\frac{OE}{O_1B} = \frac{AE}{AO_1} \;;\; O_1B = \frac{a}{\sqrt{3}} \;;\; AE = \frac{a}{2};$$

$$AO_1 = \sqrt{AB^2 - O_1B^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Do đó : } R = \frac{AE\,.\,O_1B}{AO_1} = \frac{a}{\sqrt{3}}\,.\,\frac{a}{2}\,.\,\frac{3}{a\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

2) Theo công thức Hêrông về diện tích của tam giác ta có:

$$S = \left[(\frac{a+b+c}{2})(\frac{a+b-c}{2})(\frac{a-b+c}{2})(\frac{b+c-a}{2})\right]^{\frac{1}{2}} ; (1)$$

tất cả các thừa số đều dương (tổng hai cạnh của một tam giác bao giờ cũng lớn hơn cạnh thứ ba), vì thế ta áp dụng bất đẳng thức Côsi (n = 3) cho tích (a + b - c)(a - b + c)(b + c - a).

Đặt x = a + b - c ; y = a + c - b ; z = b + c - a ta có: $xyz \leq \dfrac{(x+y+z)^3}{27}$.

Do đó : $4S = \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)} \leq$

$\leq \sqrt{(a+b+c)\dfrac{(a+b+c)^3}{27}} = \dfrac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}}$.

Biết $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \leq$

$\leq a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$,

vậy $4S \leq \dfrac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}} \leq \dfrac{3(a^2+b^2+c^2)}{3\sqrt{3}} = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{3}}$ hay $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi a = b = c.