

Câu I.

1) Bạn đọc tự giải nhé!

2) Trong trường hợp tổng quát, hàm số có đạo hàm

$$y' = 3[(x+a)^2 + (x+b)^2 - x^2] = 3[x^2 + 2(a+b)x + a^2 + b^2].$$

Với y' là hàm bậc hai của x , nên để y có cực đại và cực tiểu, y' phải đổi dấu, tức là có biệt thức $\Delta' > 0$ hay

$$\Delta' = (a+b)^2 - a^2 - b^2 = 2ab > 0 \Rightarrow ab > 0.$$

3) Nếu phương trình $y = 0$ có 3 nghiệm phân biệt, thì đồ thị của hàm y phải cắt Ox tại 3 điểm phân biệt, do đó y phải có cực đại, cực tiểu, ngoài ra $y_{\max} > 0$, $y_{\min} < 0$.

Từ phần (2) suy ra $ab > 0$, và ta có $y' = 0$ khi $x = -(a+b) \pm \sqrt{2ab}$. Như vậy gọi $f(x)$ là biểu thức của y , thì cần có

$$y_{\max} = f(-a-b-\sqrt{2ab}) = -(a+\sqrt{2ab})^3 - (b+\sqrt{ab})^3 + (a+b+\sqrt{2ab})^3 = ab[3(a+b) + 4\sqrt{2ab}] > 0,$$

$$y_{\min} = f(-a-b+\sqrt{2ab}) = ab[3(a+b) - 4\sqrt{2ab}] < 0.$$

$$\text{Nhưng } y_{\max}y_{\min} = a^2b^2[9(a+b)^2 - 32ab] = a^2b^2[9(a-b)^2 + 4ab] > 0$$

do $ab > 0$, vậy không thể xảy ra trường hợp trên.

Thành thử phương trình $y = 0$ không thể có ba nghiệm phân biệt.

Câu II. Biến đổi phương trình đã cho dưới dạng

$$2\cos^2 x - (2m+1)\cos x + m = 0 \text{ suy ra } \cos x = \frac{1}{2}, \cos x = m.$$

1) Với $m = \frac{3}{2}$ nghiệm $\cos x = m$ bị loại. Vậy $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$.

2) Để phương trình có nghiệm

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos x < 0. \text{ Vậy } -1 \leq m < 0.$$

Câu III.

1) Đặt $t = 2^x > 0$, bài toán quy về : tìm a để bất phương trình

$$at^2 + 4(a-1)t + a - 1 > 0 \quad (1)$$

được nghiệm đúng với mọi $t > 0$.

Với $a = 0$, (1) trở thành $-4t - 1 > 0$ không được nghiệm đúng khi $t > 0$.

2) Nếu $a < 0$, gọi $f(t)$ là vế trái của (1). Vì $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -\infty$

nên với $t > 0$ đủ lớn $\Rightarrow f(t) < 0 \Rightarrow$ (1) không được nghiệm.

3) Xét $a > 0$. Khi đó $f(t)$ có biệt số thu gọn

$$\Delta' = 4(a-1)^2 - a(a-1) = (a-1)(3a-4).$$

Phân biệt các trường hợp :

i) $0 < a < 1 \Rightarrow \Delta' > 0 \Rightarrow f(t)$ có hai nghiệm phân biệt $t_1 \leq t_2$.

$$\text{Theo hÖ thöc Viet } t_1 t_2 = \frac{a-1}{a} < 0 \Rightarrow t_1 < 0 < t_2.$$

vậy $f(t) < 0$ khi $0 < t < t_2 \Rightarrow$ (1) không được nghiệm với các giá trị này của t .

ii) $a \geq 1$: với $t > 0$ $f(t) = at^2 + 4(a-1)t + (a-1) \geq at^2 > 0$

(1) được nghiệm đúng với mọi $t > 0$. Thành thử đáp số là $a \geq 1$.

Câu IV. Gọi I, J, K là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác đều ABD, BCE, CAF, ta hãy chứng minh chẳng hạn

$$IJ = IK.$$

Quả vậy theo định lí hàm côsin

$$IJ^2 = IB^2 + BJ^2 - 2IB \cdot BJ \cos \angle IBJ =$$

$$\frac{1}{3}(c^2 + a^2 - 2ac \cos(B + 60^\circ)),$$

$$IK^2 = \frac{1}{3}(c^2 + b^2 - 2bc \cos(A + 60^\circ)).$$

Đẳng thức $IJ = IK$ tương đương với

$$a^2 - 2accos(B + 60^\circ) = b^2 - 2bccos(A + 60^\circ) \Leftrightarrow$$

$$a^2 - b^2 = c[2acos(B + 60^\circ) - 2bccos(A + 60^\circ)]. \quad (1)$$

$$\text{Ta có } 2acos(B + 60^\circ) - 2bccos(A + 60^\circ) = acosB - bcosA =$$

$$= 2R(\sin A \cos B - \sin B \cos A) = 2R \sin(A - B).$$

Vậy vế phải của (1) bằng

$$2Rc \sin(A - B) = 4R^2 \sin C \sin(A - B).$$

Vế trái của (1) bằng

$$a^2 - b^2 = 4R^2(\sin^2 A - \sin^2 B) = 2R^2(\cos 2B - \cos 2A) = 4R^2 \sin(A - B) \sin(A + B) =$$

$$= 4R^2 \sin C \sin(A - B).$$

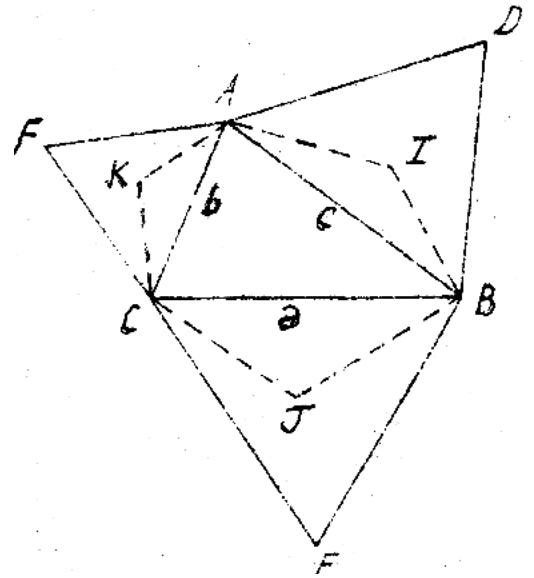
Suy ra $IJ = IK$. Tương tự ta có $IK = KJ$, vậy IJK là tam giác đều.

Câu Va. 1) Nếu $a + b = 0$, thì các đường thẳng AN, BM không cắt nhau.

Nếu $a + b \neq 0$, thì giao điểm I của các đường thẳng đó có tọa độ

$$x_I = \frac{3(a - b)}{a + b}, \quad y_I = \frac{ab}{a + b} \quad (1)$$

2) Như đã biết (đề số 103, câu IVa), để đường thẳng



$Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

điều kiện cần và đủ là $a^2A^2 + b^2B^2 = C^2$. (2)

Trở về bài toán đang xét, ta có đường thẳng MN với phương trình

$$y = \frac{(b-a)x}{6} + \frac{a+b}{2},$$

và hệ thức (2) trở thành

$$\frac{9(b-a)^2}{36} + 4 = \frac{(a+b)^2}{4} \Leftrightarrow ab = 4.$$

3) Vì $ab = 4$, nên $a \neq 0$, $b \neq 0$, và a, b cùng dấu, vậy $a + b \neq 0$. Từ (1) suy ra các tọa độ của I:

$$x_I = \frac{3(a-b)}{a+b}, \quad y_I = \frac{4}{a+b}.$$

Hiển nhiên $y_I \neq 0$. Vậy

$$a + b = \frac{4}{y_I}$$

$$a - b = \frac{x_I}{3}(a + b) = \frac{4x_I}{3y_I}.$$

Suy ra

$$2a = \frac{4}{y} + \frac{4x}{3y}$$

$$2b = \frac{4}{y} - \frac{4x}{3y}$$

$$\Rightarrow (4ab = 16)$$

$$16 = \frac{16}{y^2} - \frac{16x^2}{9y^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + y^2 = 1. (E')$$

Ta thấy điểm I thuộc elip (E'). Vì

$$ab = 4, \quad x_I = \frac{3(a-b)}{a+b}, \quad y_I = \frac{4}{a+b}$$

ta thấy y_I nhận mọi giá trị khác 0, với trị số tuyệt đối không vượt quá 1. Suy ra : tập hợp các điểm I là đường elip (E') bỏ đi 2 đỉnh trên trục lớn, đó là các điểm $(\pm 3; 0)$.

Câu Vb. 1) Gọi A', B' là các hình chiếu vuông góc của A và B lên D . Ta có $AA' \perp D, BB' \perp D, IM \perp D$, vậy các đường thẳng AA', BB', IM đ ợc chứa trong ba mặt phẳng vuông góc với D đi qua A', B', M . Theo định lí Talet trong không gian, ta có

$$\frac{A'M}{B'M} = \frac{AI}{BI} = 1 \Rightarrow A'M = B'M.$$

Khi đó các tam giác vuông $AA'M, BB'M$ có hai cạnh góc vuông bằng nhau, nên chúng bằng nhau $\Rightarrow AM = BM$, vậy $M \in P$.

2) $H' OH \perp (P)$. Ta có $IM \perp OM$,
 $IM \perp OH \Rightarrow IM \perp (OMH) \Rightarrow IM \perp MH$. Vậy M nằm trên đường tròn đường kính IH trong mặt phẳng P , với bán kính

$$R = \frac{1}{2} IH = \frac{1}{2} \sqrt{OI^2 - OH^2} = \frac{1}{2} \sqrt{d^2 - h^2}.$$

3) Từ các tam giác vuông OMH, OMI , suy ra

$$MH = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{x^2 - h^2},$$

$$MI = \sqrt{OI^2 - OM^2} = \sqrt{d^2 - x^2}.$$

$$\text{Vậy } V = V_{OHMI} = \frac{1}{3} OH \cdot \frac{MI \cdot MH}{2} = \frac{h}{6} \sqrt{(x^2 - h^2)(d^2 - x^2)}.$$

Vì h và d không đổi, suy ra V lớn nhất khi

$$x^2 - h^2 = d^2 - x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{d^2 + h^2}{2}}.$$

