**Câu I.** 1) $\frac{1}{2}(1 + a^2)(1 + b^2) = \frac{1}{2}(1 + a^2b^2 + a^2 + b^2) = \frac{1}{2}\left[(1 - ab)^2 + (a + b)^2\right] \leftrightarrow |1 - ab| \,.\, |a + b|$,

từ đó suy ra kết quả cần chứng minh.

2) Vế trái của bất phương trình có nghĩa khi $x \neq 0$. Với $x > 0 \Rightarrow 2^x > 1$, bất phương trình tương đương với

$2^{1-x} - 2x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow 2^{1-x} + 1 \leq 2x$.

Với $x < 0$, bất phương trình tương đương với $2^{1-x} + 1 \geq 2x$.

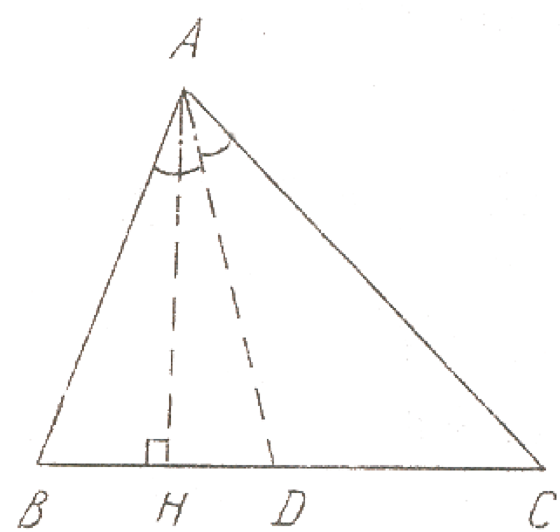
Trên mặt phẳng tọa độ, xét đồ thị các hàm $y_1 = 2^{1-x} + 1$,
$y_2 = 2x$. Hàm $y_1$ là nghịch biến, hàm $y_2$ là đồng biến, đồ thị của chúng cắt nhau tại điểm $x = 1$, $y = 2$. Từ đó suy ra nghiệm của bất phương trình đã cho : $x < 0$ ; $1 \leq x$.

**Câu II**. Giả sử h, l là độ dài các đường cao và đường phân giác trong xuất phát từ đỉnh A. Ta có

$$\frac{h}{l} = \frac{AH}{AD} = \sin \widehat{ADB} = \sin(B + \frac{A}{2}),$$

vậy $\frac{h^2}{l^2} = \sin^2(B + \frac{A}{2}) = \frac{1}{2[1 - \cos(2B + A)]} = \frac{1}{2}\left[1 + \cos(B - C)\right] = \cos^2\frac{B - C}{2}$.

Mặt khác, ta biết rằng (xem lời giải đề số 94)




$$\frac{r}{R} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 2\sin\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B - C}{2} - \cos\frac{B + C}{2}\right] =$$

$$= 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B - C}{2} - 2\sin^2\frac{A}{2}.$$

Ta cần chứng minh $\frac{h^2}{l^2} \geq \frac{2r}{R}$ hay

$$\cos^2\frac{B - C}{2} \geq 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B - C}{2} - 4\sin^2\frac{A}{2}$$

hay $\left[\cos\frac{B - C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\right]^2 \geq 0.$

Bất đẳng thức này đúng. Dấu = xảy ra khi

$\cos\frac{B-C}{2} = 2\sin\frac{A}{2} \Rightarrow$

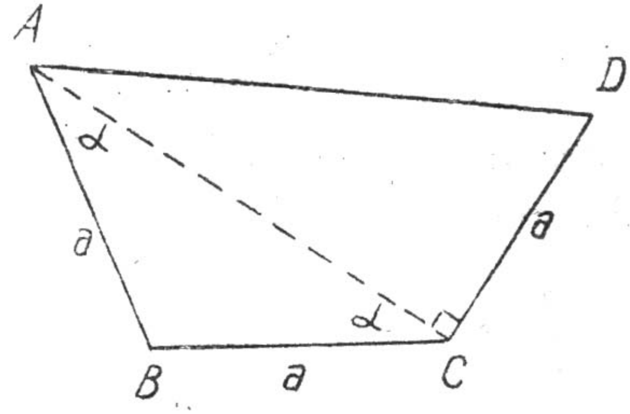
$\Leftrightarrow\ 2\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{B+C}{2} = 4\sin\frac{A}{2}\ \cos\frac{A}{2}$

$\Leftrightarrow\ \sin B + \sin C = 2\sin A$

$\Leftrightarrow$ (theo định lí hàm số sin) $2a = b + c$.

Câu III. 1) Đặt $t = \sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x}$ thì $|t| \leq 1 + \sqrt{2}$, và
$t^2 = 2 + 2\sin x\sqrt{2 - \sin^2 x}$, phương trình đã cho trở thành $t^2 + 2t - 8 = 0$.

Nghiệm $t = -4$ bị loại. Với $t = 2$, suy ra $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).




2) Kẻ đường chéo AC : ABC là tam giác cân đáy AC,

gọi $\alpha$ là góc nhọn ở đáy . Chỉ cần xét trường hợp ABCD

là tứ giác lồi và $\widehat{ACD} = \pi/2$. Gọi S là diện tích của tứ giác ABCD.

Ta có : $S = dt(ABC) + dt(ACD) = \frac{1}{2}a^2\sin 2\alpha + a^2\cos\alpha = a^2\cos\alpha\ (1 + \sin\alpha)$.

Cần xác định $\alpha$ sao cho $y = \cos\alpha(1 + \sin\alpha)$ lớn nhất. Ta có
$y > 0$ (vì $\alpha$ nhọn) và

$$y^2 = \cos^2(1 + \sin\alpha)^2 = (1 - \sin\alpha)\ (1 + \sin\alpha)^3 = \frac{1}{3}(3 - 3\sin\alpha)\ (1 + \sin\alpha)^3 \leq \frac{1}{3}\cdot\frac{(3 - 3\sin\alpha + 3 + 3\sin\alpha)^4}{4^4} = \frac{27}{16}$$

(bất đẳng thức Côsi cho 4 số dương). Vậy $y \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$, dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi

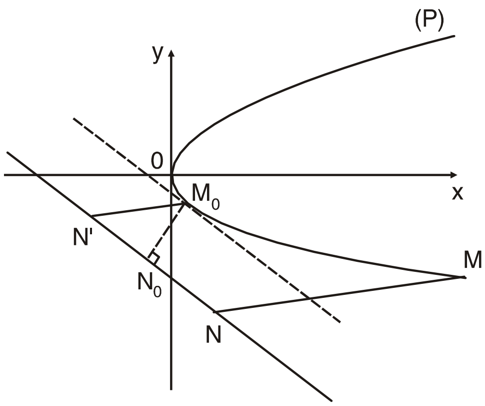
$3 - 3\sin\alpha = 1 + \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$;

khi đó ABCD là nửa lục giác đều cạnh a.

**Câu IVa.**

$$0<\int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x}<\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$$

**Câu Va.** Để ý rằng hệ




$$\begin{cases} y^2=64x \\ 4x+3y+46=0 \end{cases}$$

vô nghiệm : đường thẳng (d)

$$4x + 3y + 46 = 0$$

không cắt parabol (P)

$$y^2=64x\,.$$

Ta hãy tìm điểm $M_o(x_o, y_o)$ trên (P) sao cho tại đó tiếp tuyến song song với (d) : ta có

$$y'=\frac{32}{y_o}=-\frac{4}{3} \Rightarrow y_o=-24 \Rightarrow x_o=\frac{y_o^2}{64}=9\,.$$

(Như vậy tiếp tuyến ấy có phương trình 4x + 3y + 36 = 0).

Giả sử M là một điểm tùy ý thuộc (P), N là một điểm tùy ý thuộc (d). Lấy $N' \in$ (d) sao cho $M_oN'$ // MN, và gọi $N_o$ là hình chiếu vuông góc của $M_o$ lên (d) (Hình 12). Hiển nhiên

$$MN \ge M_oN' \ge M_oN_o\,,$$

vậy $M_oN_o$ là đoạn ngắn nhất trong tất cả các đoạn MN. Ta có

$$M_oN_o=\frac{|4x_o+3y_o+36|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{10}{5}=2\,.$$

Nhận xét thêm : đường thẳng $M_oN_o$ có phương trình

$$3x - 4y - 123 = 0,$$

điểm $N_o$ có tọa độ

$$N_o\left(\frac{37}{5}\ ;\ -\frac{126}{5}\right).$$

**Câu IVb.**

1) ΔACD = ΔBCD ⇒ AN = BN ⇒ ΔANB cân ⇒ Trung tuyến NM cũng là chiều cao ⇒ MN ⊥ AB.

□ACB = □ADB ⇒ DM = CM ⇒ □CMD cân ⇒ Trung tuyến MN cũng là đường cao ⇒ MN ⊥ CD (2)

Từ (1) và (2) suy ra MN là đường vuông góc chung của AB và CD.

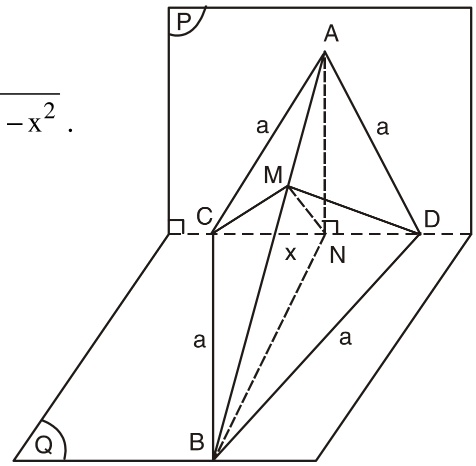
2) Vì AN ⊥ CD, BN ⊥ CD ⇒ $\widehat{ANB}=90^o$ ⇒ □ANB vuông cân ⇒ NM = $\frac{1}{2}$AB.

Ta có : AB = AN$\sqrt{2}$ = $\sqrt{2}\sqrt{a^2-x^2}$ ⇒

$$\Rightarrow MN=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2-x^2}\,.$$

3) Vì CM ⊥ AB, DM ⊥ AB ⇒ $\widehat{CMD} = \alpha$ là góc phẳng của nhị diện cạnh AB ⇒

$\widehat{NMC} = \frac{\alpha}{2}$ và $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{NC}{NM}$.




Muốn nhị diện (AB) vuông thì

$\alpha = 90^o$ , tức $tg\frac{\alpha}{2} = 1$ ,tức NC = NM, hay $x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$ .

Giải ra được $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Khi đó ta cũng có

$AB = \frac{2a\sqrt{3}}{3} = 2x = CD$.

Vậy muốn nhị diện (AB) vuông thì

$CD = 2x = AB = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Xác định O : Mặt phẳng (ANB) là mặt phẳng trung trực của đoạn CD, mặt phẳng (CMD) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB và MN là giao tuyến của 2 mặt phẳng đó. Do đó điểm O cách đều 4 điểm A, B, C, D phải nằm trên MN. Đặt OM = y. Do OA = OB = OC = OD nên

$$OA^2 = OC^2 \text{ ; tức } \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{CD}{2}\right)^2 + (MN - y)^2 .$$

Vì AB = CD nên $y^2 = (MN - y)^2 \Rightarrow$ MN = 2y. Do đó O là trung điểm của MN.

Tính OA : $OA^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + MN^2)$, với $MN = \frac{AB}{2} \Rightarrow$

$$OA^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{4a^2}{3} + \frac{a^2}{3}\right) = \frac{5a^2}{12} \Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{15}}{6} .$$